

## Ćwiczenie nr 9

### Opory ruchu ciał poruszających się w płynie.

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne określenie wartości współczynnika oporu dla ziaren żwiru poruszającego się w cieczy.

#### 1. Wprowadzenie.

##### 1.1. Równanie ruchu.

Znajomość praw rządzących ruchem ciał w ośrodku płynnym posiada duże znaczenie praktyczne. Pozwala np. na określenie oporu, który pokonać musi poruszający się statek, na projektowanie urządzeń do transportu hydraulicznego itp.. Jednakże nas najbardziej interesować będą takie zagadnienia jak: ruch osadów dennych w korytach rzecznych, transport pyłów przez wiatr, a także sedymentacja zawiesiny w osadnikach – a więc przypadek ruchu drobnych cząstek substancji rozproszonej w masie płynu stanowiącego nośnik.

Generalnie można wyróżnić dwa sposoby ujęcia przedstawionych powyżej zagadnień. Pierwszy z nich, nazywany fenomenologicznym, polega na zastąpieniu rzeczywistej mieszaniny dwu- lub wielofazowej przez umowny płyn jednorodny, którego parametry – głównie lepkość i gęstość – wyznaczamy przez uśrednienie bądź skorygowanie parametrów czystych składników. Metoda tą jako wykraczającą poza ramy kursu nie będziemy się zajmować.

Drugi sposób określanej mianem strukturalnego, polega na badaniu zachowania się poszczególnych cząstek zawiesiny. Ze względu na ogromną z reguły ilość cząstek zawiesiny praktycznie niemożliwa jest analiza ruchu każdej z nich. Należy zatem zdecydować się na wybór cząstki miarodajnej dla danego zagadnienia, określić jej zachowanie się w przepływie, a otrzymane rezultaty wykorzystać do celów praktycznych. Możliwe są tu różne rozwiązania – przykładowo przy projektowaniu osadników ze wszystkich cząstek, które muszą ulec sedymentacji, wybieramy jako miarodajną cząstkę o najmniej korzystnych parametrach osadzania – czyli najmniejszą i najlżejszą. Jest rzeczą oczywistą, że w osadniku zaprojektowanym dla takich cząstek wytrącone zostaną wszystkie inne posiadające korzystniejsze własności sedymentacyjne.

Zasadniczą cechą metody strukturalnej jest więc badanie ruchu pojedynczej cząstki zawiesiny, dlatego też bliżej rozważymy to zagadnienie. Interesować nas będzie tylko ruch postępowy, a w związku z tym możemy cząstkę potraktować jak punkt materialny, którego prędkość musi spełniać II prawo Newtona:

$$\rho_{st} \cdot V \cdot \frac{du}{dt} = \sum F \quad [9.1]$$

gdzie:

**u** - wektor prędkości,

**$\rho_{st}$**  - gęstość substancji rozproszonej,

**V** - objętość cząstki zawiesiny,

**$\sum F$**  - suma sił działających na cząsteczkę (sa to siły ciężkości, wyporu, oporu, siła mas stowarzyszonych, siła Basseta).

W dalszym ciągu rozważań zajmiemy się tylko siłą oporu. Dla szczególnego przypadku sztywnej cząstki kulistej, poruszającej się bardzo wolno w cieczy o określonej lepkości, siła oporu wyraża się znanym wzorem Stokes'a:

$$F_0 = 3 \pi \cdot \mu \cdot u \cdot d \quad [9.2]$$

gdzie:

- $\mu$  - dynamiczny współczynnik lepkości w [Pa·s],
- $u$  - prędkość opadania kulki w [m/s],
- $d$  - średnica kulki w [m],
- $\nu$  - kinematyczny współczynnik lepkości w [m<sup>2</sup>/s].

Przy czym wzór ten ważny jest dla liczby Reynoldsa:

$$Re = \frac{ud}{\nu} < 1 \quad [9.3]$$

co np. dla ruchu kropeł wody w powietrzu odpowiada wartości  $d < 0,1$  mm (krople mgły). Jednakże zdecydowana większość przypadków praktycznych nie spełnia warunku [9.3], a ponadto kształt interesujących nas cząstek różni się z reguły od kulistego. Z tego względu posługujemy się inną zależnością dla siły oporu. Ma ona charakter półempiryczny, a niekiedy bywa nazywana prawem Newton'a:

$$F_0 = C_d \cdot A \cdot \frac{\rho u^2}{2} \quad [9.4]$$

gdzie:

- $C_d$  - empiryczny współczynnik oporu, wielkość bezwymiarowa,
- $\rho$  - gęstość nośnika w [kg/m<sup>3</sup>],
- $A$  - pole przekroju czynnego cząstki w [m<sup>2</sup>], jest to pole powierzchni rzutu cząstki na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu.

## 1.2. Współczynnik oporu.

Jak już wspomniano, celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika oporu, toteż obecnie skupimy się na tym zagadnieniu. Potrzeba jego wyznaczenia wynika z faktu, że współczynnik  $C_d$  we wzorze [9.4] można wyznaczyć analitycznie tylko dla ruchu laminarnego ( $Re < 1$ ). Mamy wtedy:

$$C_d = \frac{24}{Re} \quad [9.5]$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru [9.4] otrzymamy po przekształceniach zależność Stokes'a [9.2]. Jednakże gdy  $Re > 1$ , analityczne wyznaczenie współczynnika oporu staje się niemożliwe i należy go wyznaczać eksperymentalnie. Dla niektórych ciał posiadających bardziej regularny kształt, otrzymane tą drogą wartości współczynników można znaleźć w literaturze. Przykładowo:

**dla kuli:**

$$\begin{aligned} \text{dla } Re > 1,5 \cdot 10^5 & \text{ wsp. } C_d = 0,09 - 0,18 \\ \text{dla } Re < 1,5 \cdot 10^5 & \text{ wsp. } C_d = 0,47 \end{aligned}$$

**dla elipsoidy obrotowej** poruszającej się wzdłuż krótszej osi i dla stosunku półosi  $a/b = 0,75$  mamy:

$$\begin{aligned} \text{dla } Re < 5 \cdot 10^5 & \quad \text{wsp. } C_d = 0,6 \\ \text{dla } Re > 5 \cdot 10^5 & \quad \text{wsp. } C_d = 0,21 \end{aligned}$$

**dla kropli** (o długości  $l$  i szerokości  $b$ , przy  $Re > 10^6$ ) mamy:

$$\begin{aligned} l/b &= 2 \quad \text{wsp. } C_d = 0,2 \\ &= 5 \quad \text{wsp. } C_d = 0,06 \\ &= 10 \quad \text{wsp. } C_d = 0,083 \\ &= 20 \quad \text{wsp. } C_d = 0,094 \end{aligned}$$

W celu doświadczalnego wyznaczenia współczynnika oporu  $C_d$  wykorzystujemy zjawisko swobodnego opadania ciała w cieczy. Ruch taki można z dobrym przybliżeniem traktować jako ustalony w czasie. Dzięki temu równanie cząstki [9.1] zawiera tylko siły ciężkości  $F_g$ , wyporu  $F_w$  i oporu  $F_o$ :

$$F_g - F_w = F_o \quad [9.6]$$

i dalej:

$$V(\rho_{st} - \rho) = C_d \cdot A \cdot \frac{\rho u^2}{2} \quad [9.7]$$

Stąd wyznaczamy współczynnik oporu:

$$C_d = \frac{2 \cdot V \cdot (\rho_{st} - \rho) \cdot g}{\rho \cdot u^2 \cdot A} \quad [9.8]$$

Celem określenia przekroju czynnego  $A$  dla cząstki o kształcie nieregularnym musimy zmierzyć jej objętość  $V$  oraz wyznaczyć średnicę zastępczą  $d_z$  czyli średnicę kuli o tej samej objętości. Odpowiednie zależności mają postać:

$$d_z = \left( \frac{6 \cdot V}{\pi} \right)^{1/3} \quad [9.9]$$

$$A = \frac{\pi \cdot d_z^2}{4} \quad [9.10]$$

Kolejną wielkość – prędkość opadania  $u$  - możemy mierzyć różnymi metodami: począwszy od najprostszej, ale i najszybszej - metody obserwacji ze stoperem, poprzez metodę fotograficzną, aż do metod elektronicznych.

## 2. Opis stanowiska badawczego.

Stanowisko badawcze stanowi pionowo ustawiona przezroczysta rura z denkiem. Może to być również cylinder miarowy o pojemności 2 litry (dla cieczy innych niż woda – np. glikol dietylenowy lub gliceryna). Na ścianie rury umieszczone są dwie cechy wyznaczające dystans o długości  $L$ .

### 3. Część doświadczalna.

Czynności do wykonania

1. Przygotować cztery komplety ziaren żwiru o różnych rozmiarach: ok. 2 mm, 5 mm, 10 mm, 18 mm. Każdy komplet winien zawierać po  $n = 20$  ziaren.
2. Określić średnicę zastępczą  $d_z$  ze wzoru [9.9] oraz średnią gęstość  $\rho_{st}$  badanego materiału:

$$\rho_{st} = \frac{m}{n \cdot V} \quad [9.11]$$

Łączną objętość ziaren ( $n \cdot V$ ) należy zmierzyć za pomocą kalibrowanej menzurki (cylindra miarowego), wypełnionej wodą, a masą  $m$  na wadze laboratoryjnej.

3. Wypełnić wodą rurę pomiarową z pleksy (polimetakrylan metylu), oraz dwie menzurki pojemności 2 litry – jedną glikolem dietylenowym, drugą gliceryną.
4. Wrzucając kolejno ziarna żwiru do poszczególnych cieczy mierzyć za pomocą stopera czasy ich opadania  $t$  na drodze  $L$ .
5. Obliczyć średnią arytmetyczną  $t_{sr}$  z dwudziestu zmierzonych czasów opadania  $t$ .
6. Obliczyć średnią wartość współczynnika oporu  $C_d$  dla badanej próbki ziaren ze wzoru [9.8] przyjmując, że prędkość opadania:

$$u = \frac{L}{t_{sr}} \quad [9.12]$$

Obliczyć odpowiadającą tej prędkości wartość liczby Reynolds'a.

### 4. Zawartość sprawozdania.

1. Opis metody wyznaczania współczynnika  $C_d$ .
2. Wyniki pomiarów i obliczeń.
3. Wyniki obliczeń zebrać w poniższej tabeli:

Ciecz	$\mu_{cieczy}$	$\rho_{cieczy}$	L	m	V	$\rho_{st}$	$d_z$	A	u	$t_{sr}$	Re	$C_d$
	[Pa·s]	[kg/m <sup>3</sup> ]										
woda												
glikol												
gliceryna												

4. Przeprowadzić dyskusję wyników.